

Exercices – Séquence n° 2 – RÉCURRENCE : raisonnement par récurrence

Contenu	
Capacité	Raisonnement par récurrence pour établir une propriété d'une suite.

COMPÉTENCES :

Ch : CHERCHER

Mo : MODÉLISER

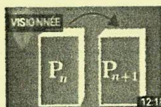
Re : REPRÉSENTER

Ra : RAISONNER

Ca : CALCULER

Co : COMMUNIQUER

Introduction : « classe inversée »



Préparer cette nouvelle notion en visionnant la vidéo suivante :
https://www.youtube.com/watch?v=Z0_dbi2RZEc



Bilan

Dans la vidéo précédente, **on démontre par récurrence** que pour tout entier naturel $n \geq 1$, $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.
 Compléter ce raisonnement ci-dessous :

• Étape n° 1 : initialisation

Si $n=1$, alors le membre de gauche est 1 et le membre de droite est $1 \times (1+1) = 1$. Donc la propriété est vraie au rang $n=1$.

• Étape n° 2 : hérédité

Supposons que la propriété soit vraie pour un certain entier $n \geq 1$, c'est-à-dire que : $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.
 On va alors montrer que la propriété est vraie au rang $n+1$ c'est-à-dire que : $1 + 2 + \dots + n + 1 = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$.

Or, $1 + 2 + \dots + n + 1 = (1 + 2 + \dots + n) + n + 1$

Comme la propriété est supposée vraie au rang n , alors $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$. *D'après l'hypothèse de récurrence*

Donc $1 + 2 + \dots + n + 1 = \frac{n(n+1)}{2} + n + 1$

Soit $1 + 2 + \dots + n + 1 = \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$

Donc la propriété est vraie au rang $n+1$. La propriété est héréditaire.

• Étape n° 3 : conclusion

D'après le principe de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.
 La propriété est vraie pour $n=1$ et elle est héréditaire. Donc la propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Remarques

1. Comme

$$\sum_{k=1}^n k = 1 + 2 + \dots + n$$

alors la propriété qu'on a démontrée par récurrence peut aussi s'écrire :

$$\text{Pour tout entier naturel } n \geq 1, \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

2. Il existe une autre méthode pour démontrer cette propriété. Laquelle ?

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \sum_{k=1}^n k = 1 + 2 + 3 + \dots + n-1 + n$$

On connaît la somme des n premiers termes d'une suite arithmétique de raison 1

Donc $\forall n \in \mathbb{N}^* = \text{nombre} \times \frac{\text{1er} + \text{dernier}}{2}$

$$\sum_{k=1}^n k = n \times \frac{1+n}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$$

Applications

Exercice 1 [Ra-Co]On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = u_n + 2n - 1$.Pour tout entier naturel n , on note $P(n)$ la propriété : « $u_n = (n-1)^2$ ».

- 1) Démontrer que la propriété $P(n)$ est **héréditaire**, c'est-à-dire que : $\forall n \in \mathbb{N}, P(n) \Rightarrow P(n+1)$.
- 2) Peut-on en conclure que : « Pour tout entier naturel n , $P(n)$ est vraie » ? Expliquer.

Exercice 2 [Ra-Co]Soit (v_n) la suite définie par $v_1 = 11$ et, pour tout entier naturel n non nul, $v_{n+1} = 4v_n + 3$.Démontrer que, pour tout entier naturel n non nul, $v_n = 3 \times 4^n - 1$.**Exercice 3** [Ra-Co]Soit (w_n) la suite définie par $w_0 = 10$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_{n+1} = \sqrt{w_n} + 5$.Démontrer que, pour tout entier naturel n , $2,5 \leq w_{n+1} \leq w_n \leq 10$ et en déduire le sens de variation de la suite (w_n) .**Exercice 4** [Ra-Ca-Co]Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 3u_n - 2n + 3$.

- 1) Écrire une fonction Python de paramètre N , N étant un entier naturel, qui renvoie la **LISTE** des termes de la suite (u_n) des rangs 0 à N .
- 2) Démontrer que, pour tout entier naturel n , $u_n \geq n$ puis en déduire la limite de la suite (u_n) .

Exercice 5 [Ra-Co]

Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$\sum_{k=0}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Exercice 6 [Ch-Ra-Co]

Démontrer que pour tout entier relatif n , et pour tout réel x , $e^{nx} = (e^x)^n$.

Exercice 7 [Mo-Ra-Ca-Co]

Soit f la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{3x}{1+2x}$.

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 0,7$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = f(u_n)$.

- 1) Étudier les variations de la fonction f sur $[0; +\infty[$.
- 2) En déduire que si $x \in [0; 1]$, alors $f(x) \in [0; 1]$.
- 3) Démontrer que, pour tout entier naturel n , $0 \leq u_n \leq 1$.
- 4) Étudier les variations de la suite (u_n) .

Exercice 8 [Ch-Mo-Ra-Ca-Co] D'après Bac, Amérique du Sud 2016

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 0$ et pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = \frac{1}{2 - u_n}$.

- 1) Calculer u_1 , u_2 et u_3 .
- 2) On a calculé les onze premiers termes de cette suite à l'aide d'un tableur.
(Certaines valeurs sont approchées au millièmè).

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1	n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	u_n	0,0	0,5	0,667	0,75	0,8	0,833	0,857	0,875	0,889	0,9	0,909

- a. Quelle formule a été saisie en cellule C2 et étendue vers la droite ?
 - b. Conjecturer la forme explicite de u_n en fonction de n . Démontrer cette conjecture.
 - c. En déduire la limite de la suite (u_n) .
- 3) Compléter l'algorithme ci-contre permettant de déterminer la plus petite valeur de l'entier naturel n tel que $|u_{n+1} - u_n| \leq 10^{-3}$.

```

n ← 0
a ← 0
b ← 0,5
Tant que |b - a| .....
    n ← .....
    a ← .....
    b ← .....
Fin tant que
Afficher .....
```

Exercice 9 [Ra-Ca-Co] Bac, Amérique du Nord 2025

On considère la suite numérique (u_n) définie par son premier terme $u_0 = 2$ et pour tout entier naturel n , par :

$$u_{n+1} = \frac{2u_n + 1}{u_n + 2}$$

On admet que la suite (u_n) est bien définie.

1) Calculer le terme u_1 .

2) On définit la suite (a_n) pour tout entier naturel n par :

$$a_n = \frac{u_n}{u_n - 1}$$

On admet que la suite (a_n) est bien définie.

a. Calculer a_0 et a_1 .

b. Démontrer que, pour tout entier naturel n , $a_{n+1} = 3a_n - 1$.

c. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, $a_n \geq 3n - 1$.

d. En déduire la limite de la suite (a_n) .

3) On souhaite étudier la limite de la suite (u_n) .

a. Démontrer que pour tout entier naturel n , $u_n = \frac{a_n}{a_n - 1}$.

b. En déduire la limite de la suite (u_n) .

4) On admet que la suite (u_n) est décroissante.

On considère le programme suivant écrit en langage Python :

a. Interpréter les valeurs n et u renvoyées par la fonction $\text{algo}(p)$ dans le contexte de l'exercice.

b. Donner, sans justifier, la valeur de n pour $p = 0,001$.

```
1 def algo(p):
2     u=2
3     n=0
4     while u-1>p:
5         u=(2*u+1)/(u+2)
6         n=n+1
7     return (n,u)
```

Exercice 10 [Ch-Ra-Ca-Co]

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = u_n + 3n - 7$.

1) a. Déterminer, par le calcul, les cinq premiers termes de la suite (u_n) .

b. Montrer que la suite (u_n) est croissante à partir du rang $n = 3$.

2) On souhaite, dans cette question 2, démontrer, par deux méthodes différentes que, pour tout entier naturel n :

$$u_n = \frac{3}{2}n^2 - \frac{17}{2}n$$

• **1^{ère} méthode**

On considère la suite auxiliaire (v_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$v_n = u_{n+1} - u_n$$

a. Exprimer v_n en fonction de n , puis démontrer que (v_n) est une suite arithmétique dont on précisera le premier terme et la raison.

b. On considère, pour tout entier naturel n non nul, la somme :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} v_k = v_0 + \dots + v_{n-1}$$

Montrer que, pour tout entier naturel n non nul, $S_n = u_n - u_0$.

c. En utilisant la nature de la suite (v_n) , calculer cette somme d'une autre manière.

d. Comparer les deux expressions obtenues et conclure.

• 2^{de} méthode

À l'aide d'un raisonnement par récurrence, démontrer que, pour tout entier naturel n ,

$$u_n = \frac{3}{2}n^2 - \frac{17}{2}n$$

3) a. Déterminer la limite de la suite (u_n) .

b. On considère le programme Python ci-contre.

À l'aide d'une calculatrice, déterminer la valeur renvoyée par ce programme lorsqu'on l'exécute dans une console d'exécution Python en saisissant :

i. $A = 10$

ii. $A = 1000$

c. Quel est le rôle de ce programme ?

Est-on certain que le programme s'arrête ? Justifier.

```

1 from math import *
2 def seuil(A):
3     U=0
4     n=0
5     while U<=A:
6         U=U+3*n-7
7         n=n+1
8     return n
  
```

Exercice 11 [Ch-Ra-Ca-Co]

Soit la suite numérique (u_n) définie par $u_0 = 2$ et,

pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}n + 1$.

Partie A - Algorithmique, tableur et conjectures

1) Pour calculer et afficher le terme u_4 de la suite (u_n) , un élève propose l'algorithme ci-contre. Il a oublié de compléter deux lignes.

Recopier et compléter les deux lignes manquantes.

```

n ← 0
u ← 2
Tant que n < 4
    u ← .....
    n ← .....
Fin Tant que
Afficher u
  
```

2) Comment faudrait-il modifier cet algorithme pour qu'il calcule et affiche tous les termes de la suite de u_1 jusqu'à u_4 ?

3) À l'aide d'un tableur, on a déterminé les premiers termes de la suite (u_n) , approchés au dix-millième.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1	n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	u_n	2	2.3333	2.8889	3.5926	4.3951	5.2634	6.1756	7.1171	8.0780	9.0520	10.0347

Dans la cellule B2, on a entré 2. Quelle formule a été saisie dans la cellule C2 et recopiée vers la droite ?

4) Au vu de ces résultats, conjecturer le sens de variation et la limite de la suite (u_n) .

Partie B - Étude mathématique

5) a. Démontrer que, pour tout entier naturel n : $u_n \leq n + 3$.

b. Démontrer que, pour tout entier naturel n : $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{3}(n + 3 - u_n)$.

c. En déduire une validation de la conjecture précédente.

6) On désigne par (v_n) la suite définie, pour tout entier naturel n , par $v_n = u_n - n$.

a. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{2}{3}$.

b. En déduire que, pour tout entier naturel n : $u_n = 2\left(\frac{2}{3}\right)^n + n$.

c. Déterminer la limite de la suite (u_n) . On utilisera le théorème de comparaison.

7) Pour tout entier naturel n non nul, on pose :

$$S_n = \sum_{k=0}^n u_k = u_0 + u_1 + \dots + u_n \quad \text{et} \quad T_n = \frac{S_n}{n^2}$$

a. Exprimer S_n en fonction de n .

b. Déterminer la limite de la suite (T_n) . Indication : on admet que $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$ si $-1 < q < 1$.

Pour réviser

Exercice 12 [Mo-Ra-Ca-Co]

Voici deux fonctions écrites en langage Python par deux élèves :

Paul		Pauline	
1	def U(n):	1	def V(n):
2	u=7	2	v=5*10**n+2
3	for i in range(1,n+1):	3	return v
4	u=10*u-18		
5	return u		

- 1) Décrire les suites (u_n) et (v_n) dont ces fonctions permettent de calculer les premiers termes.
- 2) Calculer les premiers termes de chaque suite, émettre alors une conjecture et la démontrer.

Exercice 13 [Ra-Co]

On considère la suite (v_n) définie par $v_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n , $v_{n+1} = v_n + 2n + 3$.
Démontrer que, pour tout entier naturel n , $v_n \geq n^2$ puis en déduire le comportement à l'infini de la suite (v_n) .

Exercice 14 [Ra-Co]

On considère la suite (v_n) définie par $v_0 = -1$ et, pour tout entier naturel n , $v_{n+1} = v_n + 2n + 2$.
Démontrer que, pour tout entier naturel n , $v_n = n^2 + n - 1$ puis en déduire la limite de la suite (v_n) .

Exercice 15 [Mo-Ra-Ca-Co]

Jenny a ouvert un livret A et a déposé 5000€. Les intérêts composés sont de 0,5 % par an et, à chaque fin d'année, Jenny ajoutera 100 € sur son livret. On désigne par J_n la somme, en euro, sur son livret A après n années, avec $n \in \mathbb{N}$.

- 1) Démontrer que, pour tout entier naturel n , $J_n \geq 5000 + 100n$.
- 2) En déduire la limite de la suite (J_n) .
- 3) Tabuler la suite (J_n) à l'écran de la calculatrice et déterminer après combien d'années Jenny disposera de plus de 7000€.

Exercice 16 [Mo-Ra-Ca-Co]

Dans une réserve, on constate une diminution annuelle de 10 % de l'effectif des éléphants.
Afin de sauvegarder l'espèce, on décide d'introduire chaque année 42 de ces pachydermes.
La population initiale est estimée à 280 et on s'intéresse à l'évolution de cette population.

- 1) Modéliser la situation à l'aide d'une suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ en précisant ce que représentent n , u_n et u_0 .
- 2) Établir une relation de récurrence entre u_{n+1} et u_n .
- 3) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = -140 \times 0,9^n + 420$.
- 4) En déduire le sens de variation de la suite (u_n) .
- 5) Déterminer l'année à partir de laquelle le nombre d'éléphants dépassera 400.
- 6) On admet que : si $0 < q < 1$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$. En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ et interpréter le résultat.

Pour aller plus loin

Exercice 17 [Ra-Co] N°86 p33**Exercice 18** [Ra-Co] N°91 p33**Exercice 19** [Ra-Co] N°92 p33**Exercice 20** [Ra-Co] N°94 p33